Wurzeln

Wurzelexponent $\rightarrow$ $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ $\leftarrow$ Radikand oder auch Basis

Die Wurzel einer Zahl a ist die Zahl, die mit sich selbst malgenommen wieder a ergibt.

Die 2-te Wurzel nennt man auch Quadratwurzel, dabei lässt man die 2 (als Wurzel-exponent) üblicherweise weg, dann spricht man einfacher nur noch von der Wurzel:

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

<u>Beispiel</u>: $\sqrt{100} \Rightarrow$ Gesucht ist die Wurzel aus der 100

Ergebnis: Die Wurzel aus 100 ist die 10, weil 10 mal 10 = 100 ergibt.

<u>Was du auch wissen musst:</u>

$\Rightarrow$ Das Quadrat-Wurzelziehen ($\sqrt[2]{a^2}$) ist das Gegenteil des Quadrierens.
Das Wurzelziehen ($\sqrt[n]{a^n}$) ist das Gegenteil des Potenzierens (a^n)

$\Rightarrow$ Wurzelziehen heißt auch „radizieren"

$\Rightarrow$ Wurzelziehen geht zum Beispiel mit Probieren.

$\Rightarrow$ Negative Zahlen haben keine Wurzeln. Die Zahl unter dem Wurzelzeichen ist positiv: $\sqrt{a}$ mit a ≥ 0 (der Radikand muss positiv sein)

$\Rightarrow$ Negative Zahlen gelten nicht als Wurzeln. Aber eine Wurzel kann ein negatives Vorzeichen haben. Ein negatives Vorzeichen heißt so viel wie „multipliziere mit minus eins": $-\sqrt{a} = (-1)\sqrt{a}$

$\Rightarrow$ Viele Wurzeln sind irrationale Zahlen, also Zahlen die man nicht durch einen Bruch ausdrücken kann: π, $\sqrt{2}$ $etc.$

$\Rightarrow$ $\sqrt[3]{a}$ Ist der Wurzelexponent eine 3, dann ist die **Kubikwurzel** gesucht, man sagt auch: „die dritte Wurzel aus a".

$\sqrt[4]{a}$ Ist der Wurzelexponent eine 4, sagt man „die vierte Wurzel aus" usw.

$\sqrt[n]{a}$ Für beliebige Zahlen sagt man „**die n-te Wurzel** aus"

$\Rightarrow$ $\sqrt[1]{a} = a$ Ist der Wurzelexponent eine 1 heißt das so viel wie $a^{\frac{1}{1}} = a^1 = a$

Da die Wurzel einer Zahl auch als Potenz geschrieben werden kann, folgt, dass der Wurzelexponent nicht null sein darf, da man durch null nicht teilen darf.

$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$ **Quadratwurzel** und eine **Quadratzahl** unter/über der Wurzel **heben sich gegenseitig auf**, ebenso heben sich die dritte Wurzel aus a^3 durch die dritte Potenz von a auf ($\sqrt[3]{a^3} = a$) etc.

Wurzelgesetze: Rechenregeln

1) Wurzeln multiplizieren:

Zwei Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden **multipliziert**, indem man die **Radikanden multipliziert** und daraus die Wurzel zieht (alles unter eine Wurzel schreiben), dabei bleibt der der Wurzelexponent unverändert:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\end{array}}$$

bei Quadratwurzeln: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

Bsp.: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

Anstatt zwei Zahlen unter eine gemeinsame Wurzel zu ziehen, wie oben gezeigt, kann man Produkte auch trennen: Die Wurzel des Produkts kannst du in das Produkt zweier Wurzeln umwandeln

$$\boxed{\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$$

Bsp.: $\sqrt{3\cdot 9}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{3}\cdot 3=3\sqrt{3}$

$\sqrt{2304}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{64}=6\cdot 8=48$

Multiplikation einer ganzen Zahl und einer Wurzel: Bei der Multiplikation einer Zahl mit einer Wurzel wird oft das Multiplikationszeichen-Zeichen weggelassen.

Bsp.: $3\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

<u>Aufgaben:</u>

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=$

$\sqrt{54}\cdot\sqrt{1{,}5}=$

$\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{125}=$

$\sqrt{70}\cdot\sqrt{2{,}8}=$

$\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=$

$\sqrt{500}\cdot\sqrt{1{,}25}=$

$\sqrt{\frac{1}{25}}\cdot\sqrt{625}=$

$\sqrt{64}\cdot\sqrt{4}=$

$\sqrt{16\cdot 16}=$

$\sqrt{169\cdot 196}=$

$\sqrt{0{,}16\cdot 144}=$

$\sqrt{\frac{9}{25}\cdot 0{,}09}=\cdot$

$\sqrt{16\cdot 4}=$

$\sqrt{1{,}44\cdot 6{,}25}=$

$\sqrt{\frac{3}{25}\cdot\frac{27}{16}}=$

$\sqrt{\frac{45}{36}\cdot\frac{5}{9}}=$

2) Wurzeln dividieren:

Wurzeln mit gleichem Wurzelexponenten werden dividiert, indem man die Radikanden dividiert und dann die Wurzel zieht, dabei bleibt der Wurzelexponent gleich

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{bei Quadratwurzeln:} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

Bsp.: $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ oder: $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$

Wurzeln aus Bruch:

Auch bei der Division kann man den Bruch trennen: Die Wurzel eines Bruchs kann man in den Quotienten zweier Wurzeln umwandeln:

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Bsp.: $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

oder: $\sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$

<u>Aufgaben:</u>

$\sqrt{64 : 16} =$

$\sqrt{196 : 49} =$

$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} =$

$\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{625}} =$

$\frac{\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{20}} =$

$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{144}} =$

$\frac{\sqrt{0{,}09}}{\sqrt{1{,}44}} =$

$\frac{\sqrt{0{,}0009}}{\sqrt{14400}} =$

$\sqrt{225 : 9} =$

$\sqrt{36} : \sqrt{2{,}25} =$

$\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{49}} =$

$\frac{\sqrt{0{,}64}}{\sqrt{0{,}36}} =$

$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{200}} =$

$\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}} =$

$\frac{\sqrt{1{,}21}}{\sqrt{1{,}69}} =$

$\frac{\sqrt{0{,}81}}{\sqrt{0{,}0625}} =$

3) Wurzel addieren und subtrahieren

Wurzeln können nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie den gleichen Exponenten und den gleichen Radikanden haben.

Wurzeln werden addiert (subtrahiert) indem man den Faktor vor der Wurzel addiert (bzw. subtrahiert):

$$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x+y)\sqrt[n]{a}$$

$$x\sqrt[n]{a} - y\sqrt[n]{a} = (x-y)\sqrt[n]{a}$$

Addition: $3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{8} = (3+4)\sqrt[3]{8} = 7\sqrt[3]{8} = 7*2 = 14$

$4\sqrt{8} + x\cdot\sqrt{8} = \sqrt{8}(4+x)$

Subtraktion: $7\sqrt[3]{8} - 4\sqrt[3]{8} = (7-4)\sqrt[3]{8} = 3\sqrt[3]{8} = 3*2 = 6$

$4\sqrt{8} - a\cdot\sqrt{8} = \sqrt{8}(4-a)$

Aufgaben**:**

$\sqrt[4]{a} + 3\sqrt[4]{a} =$

$4\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} =$

$13\sqrt[5]{7} - 5\sqrt[5]{7} =$

$8\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6} =$

$4\sqrt{19} + x\cdot\sqrt{19a} =$

$\frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{3}{10}\cdot\sqrt{5} =$

4) Wurzeln ausklammern

Wie beim Ausklammern von Zahlentermen oder Variablentermen kann man auch Wurzelterme zusammenfassen oder ausklammern:

Bsp.: $3\cdot\sqrt{2} + 17\sqrt{2} - 19\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$(3 + 17 - 19 + 3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Solche Umformungen helfen dabei, Terme zu vereinfachen. Meist ergeben sich vorteilhafte Möglichkeiten zu kürzen.

Aufgaben:

$a\sqrt{5} - b\sqrt{5} + c\sqrt{5} =$

$6\sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{5} =$

$2\sqrt{a^3} + 3\sqrt{a^3} =$

$\frac{4\cdot\sqrt{13}+x\sqrt{13}}{(4+x)} =$

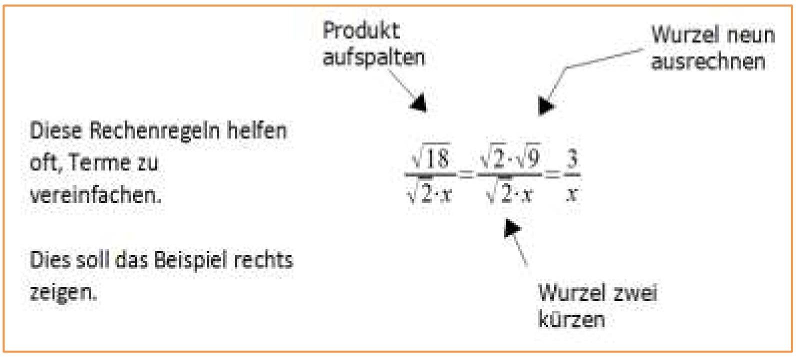
5) Teilweise die Wurzel ziehen:

Um den Radikand möglichst klein zu machen, zieht man die Wurzel teilweise. Dazu spaltet man den Radikanden in ein Produkt auf. Aus den einzelnen Faktoren dieses Produktes kann man dann die Wurzel ziehen:

Beispiele:

$\sqrt{9a} = \sqrt{9} * \sqrt{a} = 3\sqrt{a}$

$\sqrt{27} = \sqrt{9 * 3} = \sqrt{9} * \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$



Aufgaben:

$\sqrt{45a^2} =$

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}} =$

$3\sqrt{3} =$

$3a\sqrt{5} =$

$\frac{1}{4}\sqrt{5} =$

$\frac{\sqrt{845}}{\sqrt{5}} =$

6) Vor-Faktor unter die Wurzel bringen:

Manchmal lassen sich Wurzelausdrücke dadurch vereinfachen, dass man den Vorfaktor unter die Wurzel zieht. Bei Quadratwurzeln wird dazu der Vorfaktor quadriert und als Faktor unter die Wurzel geschrieben:

$$x\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x^n a} \qquad \text{oder:} \qquad x \cdot \sqrt{a} = \sqrt{x^2 a}$$

Bsp.: $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$

Den Vorfaktor unter die Wurzel bringen ist die Gegenoperation zum „teilweise die Wurzel ziehen".

Aufgaben:

$2\sqrt{3} =$

$6\sqrt{3} =$

$3\sqrt{2} =$

$10\sqrt{9} =$

$3\sqrt{\frac{2}{3}} =$

$2\sqrt{\frac{2}{3}} =$

7) **Nenner rational machen:** (Beseitigen eine Wurzel aus dem Nenner)

a) Steht im Nenner ein Produkt mit einer Wurzel als Faktor, dann erweiterst Du den Bruch mit dieser Wurzel:

Bsp.: $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}*\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}^2\right)} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{a}$

$\frac{1}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{10}\sqrt{2} = 0{,}1\sqrt{2}$

b) Steht im Nenner eine Summe oder Differenz mit einer Wurzel, dann erweiterst Du den Bruch unter Anwendung der binomischen Formeln:

Beispiel: Erweiterung mit Hilfe der 1. Binomischen Formel

$\frac{1}{\sqrt{a+b}} = \frac{1*(\sqrt{a+b})}{(\sqrt{a+b})*(\sqrt{a+b})} = =\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{(a+b)(a+b)}} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{(a+b)}^2} = \frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$

Beispiel: Erweiterung mit Hilfe der 2. Binomischen Formel

$\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}*\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{(\sqrt{a-b})^2} = \frac{\sqrt{a-b}}{a-b} = \frac{1}{a-b}\sqrt{a-b}$

Beispiel: Erweiterung mit Hilfe der 3. Binomischen Formel

$\frac{1}{1+\sqrt{a}} = \frac{1*(1-\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})*(1-\sqrt{a})} = \frac{1-\sqrt{a}}{(1^2+(\sqrt{a}^2))} = \frac{1-\sqrt{a}}{1+a}$

Aufgaben:

$\frac{5}{\sqrt{5}} =$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} =$

$\frac{5}{3-\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{5+a}} =$

$\frac{1}{1+\sqrt{a}} =$

Zusatzaufgaben ab der Klasse 9:

8) Wurzel als Potenz

Wurzeln lassen sich auch als Potenz schreiben:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}}$$

oder: $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ (man darf auch schreiben $3^{0,5}$)

Bsp.: $\sqrt{49} = 49^{\frac{1}{2}}$

<u>Aufgaben</u>:

$\sqrt[3]{2} =$ $\qquad$ $100^{0,2} =$

$\sqrt[4]{64} =$ $\qquad$ $\sqrt[5]{32}$

9) Wurzel aus Potenz:

Steht im Exponent einer Zahl ein Bruch, dann kann man diese Zahl auch als Wurzel einer Potenz schreiben:

$$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}}$$

Bsp.: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ (siehe auch Potenzgesetze)

<u>Aufgaben:</u>

$4^{\frac{1}{2}} =$ $\qquad$ $16^{\frac{1}{4}} =$

$25^{\frac{2}{3}} =$ $\qquad$ $2^{\frac{3}{2}} =$

Wurzel und Potenz kürzen:

Eine Wurzel wird mit einem Exponenten potenziert, indem der Radikand mit dem Exponenten potenziert wird:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^6 = \sqrt[3]{4^6} = 4^{\frac{3}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

<u>Aufgaben</u>:

$\sqrt[3]{5^9} =$ $\qquad$ $\sqrt[3]{7^6} =$

$\sqrt[4]{10^8} =$

10) Wurzel aus Wurzel:

Die Wurzel wird aus einer Wurzel gezogen (oder eine Wurzel wird radiziert), indem die Wurzelexponenten multipliziert werden, und die Basis gleich bleibt:

Bsp.: $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a} = a^{\frac{1}{m*n}}}$ *(a hoch eins durch m mal n)*

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2*2]{16} = \sqrt[4]{16}$$

$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[2*4]{16} = \sqrt[2]{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[2]{2}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[6]{4096} = \sqrt[6]{4^6} = 4$$

<u>Aufgaben</u>:

$\sqrt{\sqrt{625}} =$

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} =$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}} =$

Zusammenfassung Wurzelgesetze:

Rechenoperation	Voraussetzung	Rechengesetz
Wurzeln multiplizieren	gleicher Wurzelexponent	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b}$
Wurzeln dividieren Wurzel aus Bruch	gleicher Wurzelexponent	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Wurzeln addieren	gleicher Radikand, gleicher Wurzelexponent	$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = (x+y)\sqrt[n]{a}$
Wurzeln subtrahieren	gleicher Radikand, gleicher Wurzelexponent	$x\sqrt[n]{a} - y\sqrt[n]{a} = (x-y)\sqrt[n]{a}$
Wurzel aus Potenz		$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
Wurzel aus Wurzel		$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a} = a^{\frac{1}{m*n}}$

Gemischte Aufgaben:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18} =$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27} =$

2) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28} = 14$ $\sqrt{12}\cdot\sqrt{27} =$

3) $\frac{4}{5}\sqrt{5}+\frac{3}{10}\cdot\sqrt{5} =$ $\sqrt{\frac{9a^4}{b^3}} =$

4) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{32x} =$ $\sqrt{\frac{3}{x}}\cdot\sqrt{\frac{a^3}{6}}\cdot\sqrt{3x} =$

5) $11\sqrt{7} =$ $\frac{\sqrt{2{,}5}}{\sqrt{10}} =$

6) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{18} =$ $\sqrt{160}\cdot\sqrt{3{,}6} =$

7) $\sqrt{10{,}5}\cdot\sqrt{12{,}5} =$ $\sqrt{3}+\sqrt{3} =$

8) Nenner rational machen: $\frac{\sqrt{a}}{7+\sqrt{5}} =$

9) $\sqrt{\frac{2a^4}{b^6}} =$ $\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{5} =$

10) $\sqrt{0{,}7}\cdot\sqrt{2{,}8} =$ $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} =$

11) $\sqrt{6{,}48}\cdot\sqrt{200} =$ $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{32}} =$

12) $\frac{2}{\sqrt{8}} =$ $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}} =$

13) $\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{3}} =$

14) $12\sqrt{4}-\sqrt{4} =$

15) $\sqrt{480}\cdot\sqrt{0{,}3} =$

16) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{147}} =$ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{405}} =$

17) $\frac{\sqrt{338}}{\sqrt{32}} =$ $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} =$

18) $4\sqrt{3}+0{,}5\sqrt{3} =$ $5\sqrt{9}+\frac{2}{3}\sqrt{9} =$

19) $10\sqrt[3]{27} - 5\sqrt[3]{27} =$ $\quad\quad$ $\frac{2}{\sqrt{5}} =$

20) $\sqrt{45a^2} =$ $\quad\quad$ $\sqrt[3]{16} =$

21) Teilweise Wurzel ziehen: $\sqrt{75} =$ $\quad\quad$ $\sqrt{98} =$

22) $\sqrt{\frac{x}{121}} =$ $\quad\quad$ $\sqrt{\frac{8x}{a^3}} =$

23) $\sqrt{700} =$ $\quad\quad$ $\sqrt{98} =$

24) $\sqrt{\frac{81a^3}{x^3}} =$ $\quad\quad$ $\sqrt{\frac{13r^2}{a^2b^3}} =$

25) Vorfaktor unter die Wurzel ziehen: $\quad\quad$ 2a $\sqrt{\frac{a}{2}} =$

26) $\sqrt{50} =$

27) $\frac{2}{3\sqrt{2}} =$ $\quad\quad$ $6\sqrt{7} - 4\sqrt{7} =$

28) $15\sqrt{16} + \frac{2}{5}\sqrt{16} =$ $\quad\quad$ $5\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} =$

29) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} =$

30) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$

31) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

32) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$

33) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} =$

34) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} =$

35) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}} =$

36) $(a+b)^{\frac{1}{2}}\,(a+b)^{\frac{2}{3}} + (a+b)^{\frac{1}{2}}$ - $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ =

Lösungen:

1. Wurzeln multiplizieren:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{54} \cdot \sqrt{1{,}5} = \sqrt{81} = 9$

$\sqrt{500} \cdot \sqrt{1{,}25} = \sqrt{625} = 25$

$\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{\frac{1}{25}} \cdot \sqrt{625} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{70} \cdot \sqrt{2{,}8} = \sqrt{196} = 14$

$\sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16$

$\sqrt{16 \cdot 16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{16} = 4 \cdot 4 = 16$

$\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

$\sqrt{169 \cdot 196} = \sqrt{169} \cdot \sqrt{196} = 13 \cdot 14 = 182$

$\sqrt{1{,}44 \cdot 6{,}25} = 1{,}2 \cdot 2{,}5 = 3$

$\sqrt{0{,}16 \cdot 144} = \sqrt{0{,}16} \cdot \sqrt{144} = 0{,}4 \cdot 12 = 4{,}8$

$\sqrt{\frac{3}{25} \cdot \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{81}{400}} = \frac{9}{20}$

$\sqrt{\frac{9}{25} \cdot 0{,}09} = \sqrt{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt{0{,}09} = \frac{3}{5} \cdot 0{,}3 = 0{,}18$

$\sqrt{\frac{45}{36} \cdot \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{225}{342}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

2. Wurzeln dividieren:

$\sqrt{64 : 16} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{225 : 9} = \sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{\frac{225}{9}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{9}} = \frac{15}{3} = 5$

$\sqrt{196 : 49} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{36} : \sqrt{2{,}25} = 6 : 1{,}5 = 4$

$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$

$\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{49}} = \frac{12}{7}$

$\frac{\sqrt{196}}{\sqrt{625}} = \frac{14}{25}$

$\frac{\sqrt{0{,}64}}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1\frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{0{,}8 * 25}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{144}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5 * 144}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} * \sqrt{144}}{\sqrt{5}} = 12$

$\frac{\sqrt{0{,}09}}{\sqrt{1{,}44}} = \frac{0{,}3}{1{,}2} = \frac{1}{4}$

$\frac{\sqrt{1{,}21}}{\sqrt{1{,}69}} = \frac{1{,}2}{1{,}3}$

$\frac{\sqrt{0{,}0009}}{\sqrt{14400}} = \frac{0{,}03}{120} = \frac{1}{400}$

$\frac{\sqrt{0{,}81}}{\sqrt{0{,}0625}} = \frac{0{,}9}{0{,}25} = 3{,}6$

3. Wurzeln addieren und subtrahieren:

$\sqrt[4]{a} + 3\sqrt[4]{a} = (1+3)\sqrt[4]{a} = 4\sqrt[4]{a}$

$4\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = (4+5)\sqrt[3]{3} = 9\sqrt[3]{3}$

$13\sqrt[5]{7} - 5\sqrt[5]{7} = (13-5)\sqrt[5]{7} = 8\sqrt[5]{7}$

$8\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6} = (8+1)\sqrt[4]{6} = 9\sqrt[4]{6}$

$4\sqrt{19} + x \cdot \sqrt{19a} = 4\sqrt{19} + x\sqrt{19} \cdot \sqrt{a} = (4 + x\sqrt{a})\sqrt{19}$

$\frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{3}{10} \cdot \sqrt{5} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{10}\right)\sqrt{5} = \frac{11}{10}\sqrt{5} = 1{,}1\sqrt{5}$

4. Wurzeln ausklammern:

a$\sqrt{5}$ - b$\sqrt{5}$ $+ c\sqrt{5} = (a - b + c)\sqrt{5}$

$6\sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \left(6 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{12} = 5{,}5\sqrt{12}$

$2\sqrt{a^3} + 3\sqrt{a^3} = (2+3)a\sqrt{a}$

$\frac{4\cdot\sqrt{13}+x\sqrt{13}}{(4+x)} = \frac{(4+x)\cdot\sqrt{13}}{(4+x)} = \sqrt{13}$

5. Teilweise die Wurzel ziehen:

$\sqrt{45a^2} = \sqrt{9*5} = \sqrt{9} * \sqrt{5} * \sqrt{a^2} = 3a\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6*9}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

$3\sqrt{3} = \sqrt{9} * \sqrt{3} = \sqrt{27}$

$3a\sqrt{5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{45a^2}$

$\frac{1}{4}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{1}{16}\cdot 5} = \sqrt{\frac{5}{16}}$

$\frac{\sqrt{845}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5*169}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}*\sqrt{169}}{\sqrt{5}} = 13$

6. Vorfaktor unter die Wurzel ziehen:

$2\sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{12}$

$6\sqrt{3} = \sqrt{6\cdot 3} = \sqrt{18}$

$3\sqrt{2} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{18}$

$10\sqrt{9} = \sqrt{100\cdot 9} = \sqrt{900}$

$3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{9\cdot 2}{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$

$2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4\cdot 2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$

7. Nenner rational machen:

$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5*\sqrt{5}}{\sqrt{5}*\sqrt{5}} = \frac{5*\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}*\sqrt{3}}{\sqrt{3}*\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2*3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{(\sqrt{a-b})*(\sqrt{a+b})}{(\sqrt{a+b})*(\sqrt{a+b})} = = \frac{\sqrt{a-b}*\sqrt{a+b}}{\sqrt{(a+b)(a+b)}} = \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{\sqrt{(a+b)}^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$

$\frac{5}{3-\sqrt{2}} = \frac{5\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})} = \frac{15+5\sqrt{2}}{9-2} = \frac{15+5\sqrt{2}}{7}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{5+a}} = \frac{\sqrt{a}*\sqrt{5+a}}{\sqrt{5+a}*\sqrt{5+a}} = \frac{\sqrt{a(5+a)}}{\sqrt{(5+a)^2}} = \frac{\sqrt{a^2+5a}}{5+a}$

$\frac{1}{1+\sqrt{a}} = \frac{1*(1-\sqrt{a})}{(1+\sqrt{a})*(1-\sqrt{a})} = \frac{1-\sqrt{a}}{(1^2+(\sqrt{a}^2)} = \frac{1-\sqrt{a}}{1+a}$

8. Wurzel als Potenz:

$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$100^{0,2} = 100^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{100}$

$\sqrt[4]{64} = 64^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = 2$

9. Wurzel aus Potenz:

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$

$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

$25^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = 5\sqrt[3]{5}$

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 4} = 2\sqrt{2}$

Wurzel und Potenz kürzen:

$\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$

$\sqrt[3]{7^6} = \sqrt[3]{(7^2)^3} = 7^2 = 49$

$\sqrt[4]{10^8} = \sqrt[4]{(10^2)^4} = 10^2 = 100$

10. Wurzel aus Wurzel:

$\sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt[2*2]{625} = \sqrt[4]{625} = 5$

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[3\cdot 2]{729} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Gemischte Aufgaben:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18} = \sqrt{2*18} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27} = \sqrt{3*27} = \sqrt{81} = 9$

2) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28} = \sqrt{7*28} = \sqrt{196} = 14$

$\sqrt{12}\cdot\sqrt{27} = \sqrt{12*27} = \sqrt{324} = 18$

3) $\frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{3}{10}\cdot\sqrt{5} = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{10}\right)\sqrt{5} = \frac{11}{10}\sqrt{5} = 1{,}1\sqrt{5}$ $\sqrt{\frac{x}{64}} = \frac{\sqrt{x}}{8}$

$\sqrt{\frac{9a^4}{b^3}} = \frac{3a^2}{b\sqrt{b}}$

4) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{32x} = \sqrt{2*32x^2} = \sqrt{64x^2} = 8x$

$\sqrt{\frac{3}{x}}\cdot\sqrt{\frac{a^3}{6}}\cdot\sqrt{3x} = \sqrt{\frac{3\cdot a^2\cdot 3x}{ax}} = \sqrt{\frac{9a^2}{a}} = \frac{3a}{\sqrt{a}}$

5) $11\sqrt{7} = \sqrt{121\cdot 7} = \sqrt{847}$

$\frac{\sqrt{2{,}5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2{,}5}}{\sqrt{4*2{,}5}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

6) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{18} = \sqrt{0{,}5*18} = 3$

$\sqrt{160}\cdot\sqrt{3{,}6} = \sqrt{160*3{,}6} = \sqrt{576} = 24$

7) $\sqrt{10{,}5}\cdot\sqrt{12{,}5} = \sqrt{0{,}5*12{,}5} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$

$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

8) Nenner rational machen: $\frac{\sqrt{a}}{7+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{a}*\sqrt{5-a}}{(7+\sqrt{5})*(7-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{a(5+a)}}{(7^2+(\sqrt{5}^2)} = \frac{\sqrt{a^2+5a}}{49+5}$

9) $\sqrt{\frac{2a^4}{b^6}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{b^3}$

$\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{1{,}8*5} = 3$

10) $\sqrt{0{,}7}\cdot\sqrt{2{,}8} = \sqrt{0{,}7\cdot 2{,}8} = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$

$\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12} = 5^3 = 125$

11) $\sqrt{6{,}48} \cdot \sqrt{200} = \sqrt{6{,}48 \cdot 200} = \sqrt{1296} = 36$ $\qquad \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} == \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

12) $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2*\sqrt{8}}{\sqrt{8}*\sqrt{8}} = \frac{2*\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{4}$ $\qquad \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12*9*}}{\sqrt{12}} = 3$

13) $\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3*144}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}*\sqrt{144}}{\sqrt{3}} = 12$ oder $\sqrt{\frac{432}{3}} = \sqrt{144} = 12$

14) $12\sqrt{4} - \sqrt{4} = (12-1)\sqrt{4} = 11 * 2 = 22$ $\qquad \sqrt[5]{8^{15}} = 8^3$

15) $\sqrt{480} \cdot \sqrt{0{,}3} = \sqrt{480 * 0{,}3} = \sqrt{144} = 12$ $\qquad \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

16) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{147}} = \sqrt{\frac{48}{147}} = \sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{4}{7}$ $\qquad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{405}} = \sqrt{\frac{5}{405}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$

17) $\frac{\sqrt{338}}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{338}{32}} = \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5*16}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}*\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = 4$ oder $\sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$

18) $4\sqrt{3} + 0{,}5\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{3}$ $\qquad 5\sqrt{9} + \frac{2}{3}\sqrt{9} = 5\frac{2}{3}\sqrt{9} = 5\frac{2}{3} * 3 = 17$

19) $10\sqrt[3]{27} - 5\sqrt[3]{27} = 5\sqrt[3]{27} = 5*3 = 15$ $\qquad \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2*\sqrt{5}}{\sqrt{5}*\sqrt{5}} = \frac{2*\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

20) $\sqrt{45a^2} = \sqrt{9 * 5 * a^2} = \sqrt{9} * \sqrt{5} * \sqrt{a^2} = 3a\sqrt{5}$ $\qquad \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 8} = 2\sqrt[3]{2}$

21) Teilweise Wurzel ziehen: $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$ $\qquad \sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$

22) $\sqrt{\frac{x}{121}} = \frac{\sqrt{x}}{11}$ $\qquad \sqrt{\frac{8x}{a^3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4x}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{2x}$

23) $\sqrt{700} = \sqrt{4 \cdot 175} = 2\sqrt{7 \cdot 25} = 10\sqrt{7}$ $\qquad \sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$

24) $\sqrt{\frac{81a^3}{x^3}} = \frac{9a}{x}\sqrt{\frac{a}{x}}$ $\qquad \sqrt{\frac{13r^2}{a^2b^3}} = \frac{r}{ab}\sqrt{\frac{13}{b}}$

25) Vorfaktor unter die Wurzel ziehen: $\qquad 2a\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{4a^2 \cdot a}{2}} = \sqrt{2a^3}$

26) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$

27) $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2*\sqrt{2}}{3\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \frac{2*\sqrt{2}}{3*2} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ $\qquad 6\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = (6 - 4)\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

28) $15\sqrt{16} + \frac{2}{5}\sqrt{16} = 5{,}4\,\sqrt{16} = 5{,}4 * 4 = 21{,}6\ 5\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$

29) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{9}+\sqrt{15}}{3-5} = \frac{3+\sqrt{15}}{-2} = -\frac{3}{2}\sqrt{15}$

30) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{4})}{1} = \sqrt{6} - \sqrt{4} = \sqrt{6} - 2$

31) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{2-2\sqrt{3*2}+9}{2-3} = \frac{11-2\sqrt{6}}{-1} = -(11-\sqrt{6})$

32) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{5}*\sqrt{5}+2\sqrt{5*2}+\sqrt{5*2}+2}{3} = \frac{10+3\sqrt{10}+2}{3} = \frac{12+3\sqrt{10}}{3} = \frac{4+\sqrt{10}}{1} = 4+\sqrt{10}$

33) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{5+2\sqrt{5*7}+7}{5-7} = \frac{12+2\sqrt{35}}{-2} = \frac{6+\sqrt{35}}{-1} = -(6+\sqrt{35})$

34) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{7-2\sqrt{5*7}+5}{7-5} = \frac{12-2\sqrt{35}}{2} = \frac{6-\sqrt{35}}{1} = 6-\sqrt{35}$

35) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})*(2\sqrt{7}-3\sqrt{5})}{(2\sqrt{7}+3\sqrt{5})*(2\sqrt{7}-3\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{35}-15-14+3\sqrt{35}}{4*7-9*5} = \frac{-29+5\sqrt{35}}{-17}$

36) $(a+b)^{\frac{1}{2}}\ (a+b)^{\frac{2}{3}} + (a+b)^{\frac{1}{2}}$ - $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ = $2(a+b)^{\frac{1}{2}}$